令和５年度入学者選抜試験　一般選抜（１期）　数学試験問題

＜注意事項＞

・ 解答を出すために必要な式等は，すべて記載すること。
・ 解答欄が足りない場合は，裏に続きを記入してもよい。
　ただし，表面の解答欄に「裏面に続く」と明記すること。

受験番号	

1　$x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ のとき，次の値を求めなさい。

（１）$x+y$

$$x+y$$
$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}$$
$$=-8$$

（２）x^2y+xy^2+3xy

$$x^2y+xy^2+3xy$$
$$=xy(x+y+3)$$

$$xy=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=1$$

また、（１）より $x+y=-8$ なので

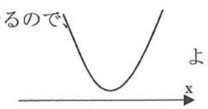
$$xy(x+y+3)$$
$$=1(-8+3)$$
$$=-5$$

2　すべての実数xに対して，不等式 $ax^2+(2a-1)x+3a-3>0$ が成り立つような定数aの値の範囲を求めなさい。

$f(x)=ax^2+(2a-1)x+3a-3$ とおく。
$y=f(x)$のグラフが x 軸よりも常に上側にあるような条件を求めればよい。

(i)　a=0 の場合、$f(x)=-x-3$となり、
　一次関数になるので、条件は成立しない。

(ii)　a≠0 の場合、
　a>0 のとき $y=f(x)$のグラフは下に凸となり
　a<0 のとき $y=f(x)$のグラフは上に凸となるので、
　右図のようになるための条件は a>0…①
　また、判別式を D とすると D<0 である



$$D=(2a-1)^2-4a(3a-3)<0$$
$$4a^2-4a+1-12a^2+12a<0$$
$$-8a^2+8a+1<0$$
$$8a^2-8a-1>0$$
$8a^2-8a-1=0$とおくと
$$a=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot8\cdot(-1)}}{2\cdot8}$$
$$=\frac{1}{4}(2\pm\sqrt{6})$$

よって、$a<\frac{1}{4}(2-\sqrt{6})$,　$a>\frac{1}{4}(2+\sqrt{6})$…②

①②より、$a>\frac{1}{4}(2+\sqrt{6})$

3　次の各問いに答えなさい。

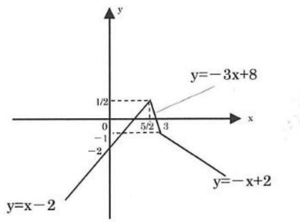
（１）$y=|x-3|-|2x-5|$のグラフを描きなさい。

(i) $x\geqq3$のとき　$y=x-3-(2x-5)$　よって $y=-x+2$

(ii) $\frac{5}{2}\leqq x<3$のとき　$y=-(x-3)-(2x-5)$　よって $y=-3x+8$

(iii) $x<\frac{5}{2}$のとき　$y=-(x-3)-\{-(2x-5)\}$　よって $y=x-2$

ゆえに、グラフは右図のようになる。



（２）方程式 $|x-3|-|2x-5|=-2$ を解きなさい。

(i)　$x\geqq3$のとき、　$x-3-(2x-5)=-2$
　これを解くと　$x=4$

(ii)　$\frac{5}{2}\leqq x<3$のとき、$-(x-3)-(2x-5)=-2$
　これを解くと　$x=\frac{10}{3}$　$\frac{5}{2}\leqq x<3$なので解なし

(iii)　$x<\frac{5}{2}$のとき、$-(x-3)-\{-(2x-5)\}=-2$
　これを解くと　$x=0$　　以上から、求める解は　$x=0,4$

※（１）で描いたグラフとｙ＝−２との交点を求めても OK

4　関数 $y=-\sin^2\theta+2\cos\theta-\frac{1}{2}$　…① について，次の各問いに答えなさい。ただし，$0°\leqq\theta\leqq90°$とする。

（１）　$\cos\theta=t$とおくとき，関数①をtを用いて表しなさい。

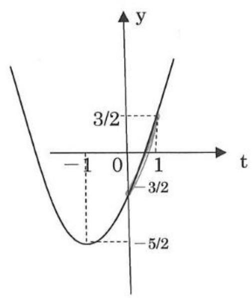
$$y=-\sin^2\theta+2\cos\theta-\frac{1}{2}$$
$$=-(1-\cos^2\theta)+2\cos\theta-\frac{1}{2}$$
$$=\cos^2\theta+2\cos\theta-\frac{3}{2}$$

$\cos\theta=t$とおくと
$$y=t^2+2t-\frac{3}{2}$$

（２）　関数①の最大値と最小値を求めなさい。また，そのときのθの値を求めなさい。

（１）より
$$y=t^2+2t-\frac{3}{2}$$
$$=(t+1)^2-\frac{5}{2}$$

グラフは右図のようになる。



また、$0°\leqq\theta\leqq90°$より$0\leqq t\leqq1$であるので

$t=1$のとき、最大値 $\frac{3}{2}$、またこのときのθの値は$\cos\theta=1$より$\theta=0°$

$t=0$のとき、最小値 $-\frac{3}{2}$、またこのときのθの値は$\cos\theta=0$より$\theta=90°$

【出題意図】

・$\boxed{1}$について
整式の整理についての理解を問う

・$\boxed{2}$について
判別式についての理解を問う

・$\boxed{3}$について
絶対値についての理解を問う

・$\boxed{4}$について
三角関数についての理解を問う